Законспектировать и выслать фотографии конспектов на электронную почту roman-sergeevich1982@mail.ru

## Сведения из истории

**1. О происхождении терминов и обозначений.** История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. *Задачами о квадратуре* той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи, которые мы сейчас относим к *задачам на вычисление площадей*. Латинское слово quadratura переводится как «придание квадратной формы». Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в античное время (и позднее, вплоть до XVIII столетия) еще не были достаточно развиты привычные для нас представления о действительных числах. Математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами, которые нельзя перемножать. Поэтому и задачи на нахождение площадей приходилось формулировать, например, так: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу». (Эта классическая задача «о квадратуре круга» не может, как известно, быть решена с помощью циркуля и линейки.)

Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы $S$ (первой буквы слова summa). Само слово *интеграл* придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integro, которое переводится как *приводить в прежнее состояние, восстанавливать*. (Действительно, операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно, происхождение термина *интеграл* иное: слово integer означает *целый*.

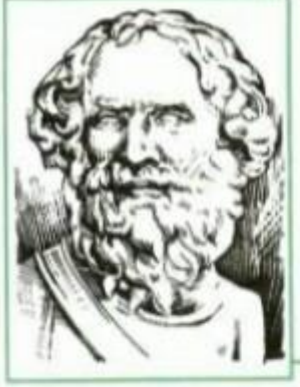
В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же, в 1696 г., появилось и название новой ветви математики — *интегральное исчисление* (calculus integralis), которое ввел И. Бернулли.

Другие известные вам термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились заметно позднее. Употребляющееся сейчас название *первообразная функция* заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.). Латинское слово primitivus переводится как «начальный»: $F(x) = \int f(x)\,dx$ — начальная (или первоначальная, или первообразная) для $f(x)$, которая получается из $F(x)$ дифференцированием.

В современной литературе множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется также *неопределенным интегралом*. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную. А $\int_a^b f(x)\,dx$ называют *определенным интегралом* (обозначение ввел К. Фурье (1768—1830), но пределы интегрирования указывал уже Эйлер).

**2. Из истории интегрального исчисления.** Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение *квадратур* (т. е. вычисление площадей) плоских фигур, а также *кубатур* (вычисление объемов) тел связаны с применением *метода исчерпывания*, предложенным Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 до н. э.). С помощью этого метода Евдокс доказал, например, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров, а объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра, имеющего такие же основание и высоту.

Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом. С этой модификацией вы знакомы: вывод формулы площади круга, предложенный в курсе геометрии, основан на идеях Архимеда. Напомним основные этапы, характеризующие метод Архимеда: 1) отмечается, что площадь круга меньше площади любого описанного около него правильного многоугольника, но больше площади лю-



**Архимед**
**(ок. 287—212 до н. э.) —**
великий ученый. Первооткрыватель многих фактов и методов математики и механики, блестящий инженер. Глубокие и остроумные идеи Архимеда, связанные с вычислением площадей и объемов, решением задач механики, по существу, предвосхищают открытие математического анализа, сделанное почти 2000 лет спустя.

бого вписанного; 2) доказывается, что при неограниченном удвоении числа сторон разность площадей этих многоугольников стремится к нулю; 3) для вычисления площади круга остается найти значение, к которому стремится отношение площади правильного многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон.

С помощью метода исчерпывания, целого ряда других остроумных соображений (в том числе с привлечением моделей механики) Архимед решил многие задачи. Он дал оценку числа $\pi\left(3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}\right)$, нашел объемы шара и эллипсоида, площадь сегмента параболы и т. д. Сам Архимед высоко ценил эти результаты: согласно его желанию на могиле Архимеда высечен шар, вписанный в цилиндр (Архимед показал, что объем такого шара равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра).

Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. (Добавим, что практически и первые теоремы о пределах были доказаны им.) Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод — *метод неделимых*, который также зародился в Древней Греции (он связан в первую очередь с атомистическими воззрениями Демокрита). Например, криволинейную трапецию (рис. 131, *а*) они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной $f(x)$, которым тем не менее приписывали площадь, равную *бесконечно малой величине* $f(x)\,dx$. В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме

$$S=\sum_{a<x<b} f(x)\,dx$$

бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме —

**Риман Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) —** немецкий ученый, один из крупнейших математиков XIX столетия. Сделал замечательные открытия в теории чисел и теории функций комплексного переменного. Заложил основы новой неевклидовой геометрии, получившей название римановой. Создал теорию интеграла, обобщающую результаты Коши.

нули, но нули особого рода, которые, сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

На такой кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной основе И. Кеплер (1571—1630) в своих сочинениях «Новая астрономия» (1609 г.) и «Стереометрия винных бочек» (1615 г.) правильно вычислил ряд площадей (например, площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (тело разрезалось на бесконечно тонкие пластинки). Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери (1598—1647) и Э. Торричелли (1608—1647). Сохраняет свое значение и в наше время сформулированный Б. Кавальери принцип, введенный им при некоторых дополнительных предположениях.

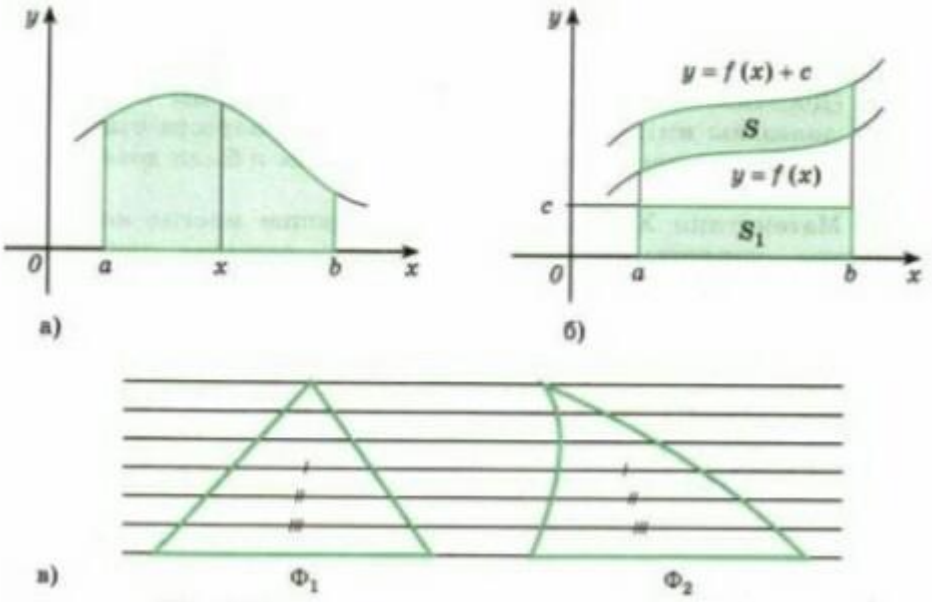



Рис. 131

**Лебег Анри**
**(1875—1941) —**
французский математик. Создатель теории меры (обобщение понятий площади и объема), на основе которой разработал новую теорию интеграла.

Однако при всей значимости результатов, полученных многими чрезвычайно изобретательными математиками XVII столетия, исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно общий алгоритм. Это сделали Ньютон и Лейбниц, открывшие независимо друг от друга факт, известный вам под названием формулы Ньютона — Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод. Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано.

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804—1889), П. Л. Чебышев (1821—1894). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

Строгое изложение теории интеграла появилось только в XIX в. Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков немецкого ученого Б. Римана (1826—1866), французского математика Г. Дарбу (1842—1917).

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1838—1922) теории меры.

Различные обобщения понятия интеграла в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875—1941) и А. Данжуа (1884—1974), советским математиком А. Я. Хинчиным (1894—1959).



205 Первообразная и интеграл