Задачи с дифференциальными уравнениями

Ну а как иначе? Если есть **дифференциальные уравнения**, то должны быть и задачи с ними! Они встречаются в математике *(само собой)*, физике, химии, других науках и, разумеется, соответствующих примеров великое множество – пятилетки не хватит, чтобы все их разобрать. Но этого и не нужно – сегодня наша цель освоить **общие принципы решения таких задач**, хотя,... штук 50-то всяко осилим)

Начнём с самого главного: вот видим мы текст задачи. **Как определить, что её нужно решать с помощью** ИМЕННО **дифференциального уравнения?** Очень просто. Поскольку корнями **диффуров** являются **функции**, то по условию так или иначе потребуется найти:

функцию / уравнение / линию / кривую / закон / зависимость и т.д.

В большинстве тематических задач фигурируют **дифференциальные уравнения первого порядка**, с них и начнём. Как вы прекрасно знаете, в оные уравнения обязательно входит **первая производная**, и поэтому для освоения урока нужно понимать *(очевидно-невероятно)*, **что такое производная**. Впрочем, уважаемые студенты, пощады не ждите – я вам обязательно напомню =) И моя беспощадность такова, что мы займёмся этим прямо сейчас:

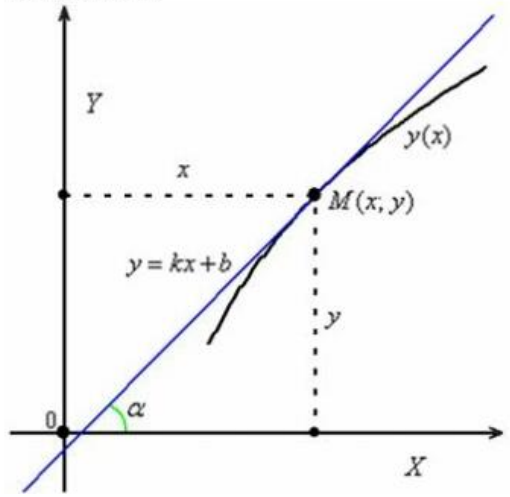
Задача 1

Кривая проходит через точку $A(2;-1)$ и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой её точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $p=3$. Найти уравнение этой кривой.

Пожалуйста, типичный признак – условие запрашивает у нас уравнение кривой, а значит, задача решается с помощью дифференциального уравнения.

Решение: на первом шаге нужно это самое уравнение составить. Рассмотрим *произвольную* точку $M(x;y)$, принадлежащую *искомой кривой*. Заметьте, что этой хитрой фразой мы учитываем ВСЕ точки разыскиваемой линии.

Выполним схематический чертёж, на котором изобразим некоторую кривую $y(x)$, произвольную точку $M(x;y)$ и **касательную** $y=kx+b$, проведённую к графику функции в данной точке:



Теперь вспоминаем, что **угловой коэффициент** k касательной **равен** *тангенсу её угла наклона* **и равен** значению **производной** в точке $M(x;y)$:
$k = tg\alpha = y'(x;y)$

Или, если короче: $k = y'$

По условию, *угловой коэффициент* касательной k в любой точке $M(x;y)$ *кривой* **пропорционален** квадрату ординаты *(«игрековой» координаты)* точки касания:

$y' \sim py^2$, где p – коэффициент пропорциональности.
(значок «тильда» обозначает пропорциональность)

В данной задаче $p = 3$. Таким образом, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$y' = 3y^2$, которое, понятно, нужно решить :)

Перед нами простейшее **ДУ с разделяющимися переменными**:
$\frac{dy}{dx} = 3y^2$
$\int \frac{dy}{y^2} = 3\int dx$
$-\frac{1}{y} = 3x + C$

Общее решение: $y = -\frac{1}{3x+C}$, где $C = const$

В результате мы получили целое *семейство* функций, удовлетворяющих критерию задачи. Но в условии есть уточнение: кривая проходит через точку $A(2;-1)$. Решим **задачу Коши**, т.е. найдём соответствующее *частное решение*. Здесь удобно непосредственно подставить в общее решение координаты $x = 2, y = -1$ точки:
$-1 = -\frac{1}{3\cdot 2 + C}$
$1 = \frac{1}{6+C}$
$6 + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = -5$

Таким образом, уравнение, искомой кривой:
$y = -\frac{1}{3x-5} = \frac{1}{5-3x}$

Ответ: $y = \frac{1}{5-3x}$

Выполним проверку. Она проводится **стандартно** + желательный анализ, связанный с содержательным смыслом задачи.

Прежде всего, убедимся, что график полученной функции действительно проходит через точку $A(2;-1)$:
$-1 = \frac{1}{5-3\cdot 2}$
$-1 = \frac{1}{-1}$
$-1 = -1$ – получено верное равенство, что и требовалось проверить.

Найдём **производную**:
$y' = \left(\frac{1}{5-3x}\right)' = ((5-3x)^{-1})' = -(5-3x)^{-2}\cdot(5-3x)' = -\frac{1}{(5-3x)^2}\cdot(0-3) = \frac{3}{(5-3x)^2}$

Подставим $y=\frac{1}{5-3x}$ и $y'=\frac{3}{(5-3x)^2}$ в уравнение $y'=3y^2$:

$$\frac{3}{(5-3x)^2}=3\cdot\left(\frac{1}{5-3x}\right)^2$$

$\frac{3}{(5-3x)^2}=\frac{3}{(5-3x)^2}$ – таким образом, частное решение найдено верно.

Но это ещё не всё – ведь мы могли неправильно составить само дифференциальное уравнение! И поэтому будет не лишним вернуться условию, согласно которому, **любая** точка кривой $y=\frac{1}{5-3x}$ должна обладать следующим свойством: **производная функции в точке** *(угловой коэффициент касательной)* равна *утроенному* квадрату «игрековой» координаты данной точки. Рассмотрим ту же точку $A(2;-1)$ и вычислим:

$$y'(2)=\frac{3}{(5-3\cdot 2)^2}=\frac{3}{(-1)^2}=3$$

С другой стороны, *утроенный* квадрат «игрековой» координаты точки A:
$3\cdot(-1)^2=3$, отлично.

Желающие могут протестировать любую другую точку, принадлежащую кривой $y=\frac{1}{5-3x}$, например точку $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$, и убедиться в справедливости только что проверенного критерия. Это, кстати, легко сделать устно.

Вот теперь-то задача «закрыта наглухо». Ну а то, что схематический чертёж далёк от графика гиперболы $y=\frac{1}{5-3x}$ – совершенно не страшно, чертёж лишь помогает разобраться в условии. И строить его, к слову, в простых случаях совсем не обязательно ;) И в самом деле – этого же не требовалось....

Пара типовых задач для самостоятельного решения:

<u>Задача 2</u>

Угловой коэффициент касательной к каждой точке кривой *обратно пропорционален* абсциссе точки касания с коэффициентом пропорциональности $p=1{,}5$. Составить уравнение данной кривой, если известно, что она проходит через точку $A(1;0)$

Как раз аналогичный пример, в котором вполне можно обойтись без чертежа. Напоминаю, что *обратная пропорциональность* устроена по принципу *«чем больше – тем меньше»* – это зависимость... где-то я о ней вроде упоминал..., да, нашёл – в статье о **гиперболе**. Впрочем, многие помнят этот материал со школы.

И тут ещё хочу предупредить о возможной «накладке» с обозначениями: в «реальных» примерах коэффициент пропорциональности очень часто обозначают буквой k, что, конечно, не есть хорошо.

Примерный образец чистового оформления задания в конце урока.

Чуть потруднее:

Задача 3

Найти кривую, для которой тангенс угла наклона ее касательной в любой её точке в 2 раз больше тангенса угла наклона прямой, проходящей через ту же точку и начало координат

А вот здесь уже чертёж не помешает – рассматриваем прямоугольный треугольник, на всякий пожарный: *тангенс – это отношение противолежащего катета к прилежащему катету*. Впрочем, «картинку» этой задачи опять же несложно «обработать в уме». Но в образце решения я не поленился и выполнил схематический чертёж. И таки догадайтесь как правильно записать ответ – проанализируйте полученное решение на соответствие условию задачи ;)

Как видите, задачки вроде бы элементарные, а «подводных камней» в них хватает. И перед тем как перейти от «чистой математики» к приложениям *(по физике, химии и т.д.)* я рассмотрю пару «настоящих» примеров.

Во многих случаях вам придётся столкнуться с задачей из **сборника А.П. Рябушко** *(Часть 2, ИДЗ 11.4, Задача №4)* или из сборника Кузнецова. Или же с какой-то похожей задачей.

Первый источник отличается меньшей сложностью, и что особо приятно, каждая из 30 задач снабжена правильным ответом. Однако здесь нужно помнить, что решение диффура обычно можно записать несколькими способами, и формально результаты могут не совпасть.

Примеры из задачника Л.А. Кузнецова *(Раздел V Дифференциальные уравнения, Задача 9* более трудны, но зато по Интернету давным-давно «гуляют» **готовые решения всех вариантов**. Может быть, найдёте и свою задачу! Однако не спешите радоваться «халяве» бездумно переписывать материалы – неточностей там хватает.

Гораздо выгоднее ОДИН РАЗ РАЗОБРАТЬСЯ в технике решения таких задач!

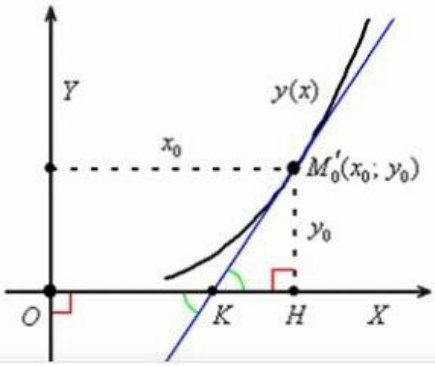
Я подробно остановлюсь на заданиях из вариантов 11-20 сборника Кузнецова, которые, как показывает практика, вызывают наибольшие затруднения у студентов, и разберу пример 12-го варианта, который, кстати, в указанном выше источнике вообще решён неправильно:

Задача 4

Найти линию, проходящую через точку $M_0(1;\,2)$, если отрезок любой ее касательной межд точкой касания и осью OY делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b=2:1$ (считая от оси OY).

Прежде всего, снова обратим внимание на то, что по условию требуется найти линию, следовательно, участь наша – дифференциальное уравнение. И, кроме того, речь идёт о касательной, которая, как вы уже вспомнили, определяется через **производную**.

Решение: должен предупредить, что здесь опять возникают «накладки» с обозначениями и я буду придерживаться собственной версии оформления, которая показалась мне наиболее удобной. Сначала рассмотрим некоторую конкретную точку $M_0'(x_0;\,y_0)$, принадлежащую искомой линии, и соответствующую касательную. Выполним схематический чертёж. Из условия задачи следует, что точка K *пересечения касательно с осью* OX лежит **строго между** точек L и M_0'. **Это принципиальный момент**! – так быва далеко не всегда. И, конечно, нужно постараться, чтобы отрезок KL был примерно в 2 раза длиннее отрезка KM_0':



Законспектировать и фотографии конспектов выслать в социальной сети «в контакте» по адресу HTTPS://m.vk.com/id40781342