

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

Можно ли определить скорость одной молекулы?

Идеальный газ. У газа при обычных давлениях расстояние между молекулами во много раз превышает их размеры. В этом случае силы взаимодействия молекул пренебрежимо малы и кинетическая энергия молекул много больше потенциальной энергии взаимодействия. Молекулы газа можно рассматривать как материальные точки или очень маленькие твёрдые шарики. Вместо *реального газа*, между молекулами которого действуют силы взаимодействия, мы будем рассматривать его *модель* — *идеальный газ*.

Запомни

Идеальный газ — это теоретическая модель газа, в которой не учитываются размеры молекул (они считаются материальными точками) и их взаимодействие между собой (за исключением случаев непосредственного столкновения).

Естественно, при столкновении молекул идеального газа на них действует сила отталкивания. Так как молекулы газа мы можем согласно модели считать материальными точками, то размерами молекул мы пренебрегаем, считая, что объём, который они занимают, гораздо меньше объёма сосуда.

Важно

Напомним, что в физической модели принимают во внимание лишь те свойства реальной системы, учёт которых совершенно необходим для объяснения исследуемых закономерностей поведения этой системы.

Ни одна модель не может передать все свойства системы. Сейчас нам предстоит решить задачу: вычислить с помощью молекулярно-кинетической теории давление идеального газа на стенки сосуда. Для этой задачи модель идеального газа оказывается вполне удовлетворительной. Она приводит к результатам, которые подтверждаются опытом.

Давление газа в молекулярно-кинетической теории. Пусть газ находится в закрытом сосуде. Манометр показывает давление газа p_0 . Как возникает это давление?

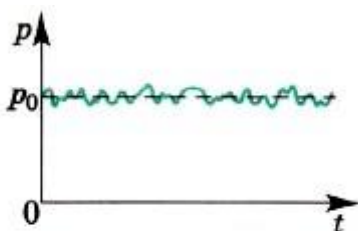


Рис. 9.1

Каждая молекула газа, ударяясь о стенку, в течение малого промежутка времени действует на неё с некоторой силой. В результате беспорядочных ударов о стенку давление быстро меняется со временем примерно так, как показано на рисунке 9.1. Однако действия, вызванные ударами отдельных молекул, настолько слабы, что манометром

они не регистрируются. Манометр фиксирует среднюю по времени силу, действующую на каждую единицу площади поверхности его чувствительного элемента — мембраны. Несмотря на небольшие изменения давления, среднее значение давления p_0 практически оказывается вполне определённой величиной, так как ударов о стенку очень много, а массы молекул очень малы.

Среднее давление имеет определённое значение, как в газе, так и в жидкости. Но всегда происходят незначительные случайные отклонения от этого среднего значения. Чем меньше площадь поверхности тела, тем заметнее относительные изменения силы давления, действующей на данную площадь. Так, например, если участок поверхности тела имеет размер порядка нескольких диаметров молекулы, то действующая на неё сила давления меняется скачкообразно от нуля до некоторого значения при попадании молекулы на этот участок.

Среднее значение квадрата скорости молекул. Для вычисления среднего давления надо знать значение средней скорости молекул (точнее, среднее значение квадрата скорости). Это не простой вопрос. Вы привыкли к тому, что скорость имеет каждая частица. Средняя же скорость молекул зависит от того, каковы скорости движения всех молекул.



Чем отличается определение средней скорости тела в механике от определения средней скорости молекул газа?

С самого начала нужно отказаться от попыток проследить за движением всех молекул, из которых состоит газ. Их слишком много, и движутся они очень сложно. Нам и не нужно знать, как движется каждая молекула. Мы должны выяснить, к какому результату приводит движение всех молекул газа.

Характер движения всей совокупности молекул газа известен из опыта. Молекулы участвуют в беспорядочном (тепловом) движении. Это означает, что скорость любой молекулы может оказаться как очень большой, так и очень малой. Направление движения молекул беспрестанно меняется при их столкновениях друг с другом.

Скорости отдельных молекул могут быть любыми, однако, среднее значение модуля этих скоростей вполне определённое.

В дальнейшем нам понадобится среднее значение не самой скорости, а квадрата скорости — средняя квадратичная скорость. От этой величины зависит средняя кинетическая энергия молекул. А средняя кинетическая энергия молекул, как мы вскоре убедимся, имеет очень большое значение во всей молекулярно-кинетической теории. Обозначим модули скоростей

отдельных молекул газа через $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$. Среднее значение квадрата скорости определяется следующей формулой:

$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2}{N}, \quad (9.1)$$

где N — число молекул в газе.

Но квадрат модуля любого вектора равен сумме квадратов его проекций на оси координат OX, OY, OZ .

Из курса механики известно, что при движении на плоскости $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. В случае, когда тело движется в пространстве, квадрат скорости равен:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (9.2)$$



Проведите числовой эксперимент. Пусть скорости молекул некоторого газа распределены так, как показано в таблице.

Число молекул	10	10	10	5
Скорость, м/с	10	20	40	50

Определите среднее значение модуля скорости и среднее значение квадрата скорости молекул этого газа. Сравните полученные результаты и сделайте вывод.

Средние значения величин v_x^2, v_y^2 и v_z^2 можно определить с помощью формул, подобных формуле (9.1). Между средним значением $\overline{v^2}$ и средними значениями квадратов проекций существует такое же соотношение, как соотношение (9.2):

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}. \quad (9.3)$$

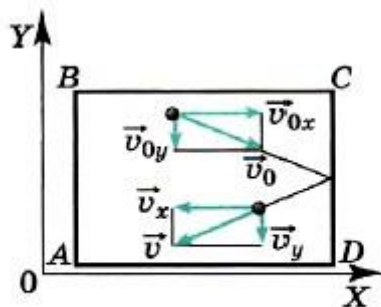


Рис. 9.2

Действительно, для каждой молекулы справедливо равенство (9.2). Сложив такие равенства, для отдельных молекул и разделив обе части полученного уравнения на число молекул N , мы придём к формуле (9.3).

Важно

Внимание! Так как направления трёх осей OX, OY и OZ вследствие беспорядочного движения молекул равноправны, средние значения квадратов проекций скорости равны друг другу:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}. \quad (9.4)$$

Учитывая соотношение (9.4), подставим в формулу (9.3) $\overline{v_x^2}$ вместо $\overline{v_y^2}$ и $\overline{v_z^2}$. Тогда для среднего квадрата проекции скорости на ось OX получим

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}, \quad (9.5)$$

т. е. средний квадрат проекции скорости равен $\frac{1}{3}$ среднего квадрата самой скорости. Множитель $\frac{1}{3}$ появляется вследствие трёхмерности пространства и соответственно существования трёх проекций у любого вектора.

Важно

Скорости молекул беспорядочно меняются, но средний квадрат скорости вполне определённая величина.

Строгий вывод уравнения молекулярно-кинетической теории газов довольно сложен. Поэтому мы ограничимся упрощённым выводом уравнения.

Предположим, что газ идеальный и взаимодействие молекул со стенкой абсолютно упругое.

Вычислим давление газа, находящегося в сосуде, на боковую стенку площадью S , перпендикулярную координатной оси OX (рис. 9.2).

ИНТЕРЕСНО Уравнение молекулярно-кинетической теории — первое количественное соотношение, полученное в МКТ, поэтому оно называется основным. После вывода этого уравнения в XIX в. и экспериментального доказательства его справедливости началось быстрое развитие количественной теории, продолжающееся по сегодняшний день.

При ударе молекулы о стенку её импульс изменяется: $\Delta p_x = m_0(v_x - v_{0x})$. При абсолютно упругом взаимодействии модули скорости молекулы до и после удара равны, и тогда изменение импульса $\Delta p_x = 2m_0v_x$. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса молекулы равно импульсу подействовавшей на неё силы со стороны стенки сосуда, а согласно третьему закону Ньютона импульс силы, с которой молекула подействовала на стенку, будет иметь то же значение.

Следовательно, в результате удара молекулы на стенку подействовала сила, импульс которой равен $2m_0|v_x|$.

Молекул много, и каждая из них передаёт стенке при столкновении такой же импульс. За время t они передадут стенке импульс $2m_0|v_x|Z$, где Z — число ударов всех молекул о стенку за это время. Число Z , очевидно, прямо пропорционально концентрации молекул, т. е. числу молекул в единице объёма, а также скорости молекул $|v_x|$. Чем больше эта скорость, тем больше молекул за время t успеют столкнуться со стенкой. Если бы молекулы «стояли на месте», то столкновений их со стенкой не было бы совсем. Кроме того, число столкновений молекул со стенкой пропорционально площади S поверхности стенки: $Z \sim n|v_x|St$. Надо ещё учесть, что в среднем только половина всех молекул движется к стенке. Благодаря хаотичному движению направления движения молекул по и против оси Ox равновероятны, поэтому вторая половина молекул движется в обратную сторону. Значит, число ударов молекул о стенку за время t $Z = \frac{1}{2} n|v_x|St$ и полный импульс силы, действовавшей на стенку, $Ft = 2m_0|v_x|Zt$. Отсюда $F = nm_0v_x^2S$.

Учтём, что не все молекулы имеют одно и то же значение квадрата скорости v_x^2 . В действительности средняя сила, действующая на стенку, пропорциональна не v_x^2 , а среднему значению квадрата скорости $\overline{v_x^2}$: $\overline{F} = nm_0\overline{v_x^2}S$. Так как согласно формуле (9.5) $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, то $\overline{F} = \frac{1}{3}nm_0\overline{v^2}S$. Таким образом, давление газа на стенку сосуда равно:

$$p = \frac{\overline{F}}{S} = \frac{1}{3}nm_0\overline{v^2}. \quad (9.6)$$

Важно

Уравнение (9.6) и есть основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.

Формула (9.6) связывает макроскопическую величину — давление, которое может быть измерено манометром, — с *микроскопическими* параметрами, характеризующими молекулы: их массой, концентрацией, скоростью хаотичного движения.

Связь давления со средней кинетической энергией молекул. Если через \overline{E} обозначить среднюю кинетическую энергию поступательного

движения молекулы $\overline{E} = \frac{m_0\overline{v^2}}{2}$, то уравнение (9.6) можно записать в виде

$$p = \frac{2}{3}n\overline{E}. \quad (9.7)$$

Важно

Давление идеального газа пропорционально произведению концентрации молекул и средней кинетической энергии поступательного движения молекул.

ЗАДАНИЕ

1. Написать краткий конспект в рабочую тетрадь

2. Вопросы (уметь устно отвечать)

1. Чем пренебрегают, когда реальный газ рассматривают как идеальный?
2. Газ оказывает давление на стенки сосуда. А давит ли один слой газа на другой?
3. Всегда ли равноправны средние значения проекций скорости движения молекул?
4. Чему равно среднее значение проекции скорости молекул на ось OX?
5. Почему молекула при соударении со стенкой действует на неё с силой, пропорциональной скорости, а давление пропорционально квадрату скорости молекулы?
6. Почему и как в основном уравнении молекулярно-кинетической теории появляется множитель $\frac{1}{3}$?
7. Как средняя кинетическая энергия молекул связана с концентрацией газа и его давлением на стенки сосуда?

3. Задание (для желающих)

Образцы заданий ЕГЭ

A1. Давление 100 кПа создаётся молекулами газа массой $m_0 = 3 \cdot 10^{-26}$ кг при концентрации $n = 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Чему равен средний квадрат скорости молекул?

- 1) 1 (мм/с)^2 2) 100 (м/с)^2 3) 3000 (м/с)^2 4) 1000 000 (м/с)^2

A2. При неизменной концентрации молекул идеального газа в результате охлаждения давление газа уменьшилось в 4 раза. Средний квадрат скорости теплового движения молекул газа при этом

- 1) уменьшился в 16 раз 3) уменьшился в 4 раза
2) уменьшился в 2 раза 4) не изменился

A3. При неизменной концентрации частиц идеального газа средняя кинетическая энергия теплового движения его молекул увеличилась в 3 раза. При этом давление газа

- 1) уменьшилось в 3 раза 3) увеличилось в 9 раз
2) увеличилось в 3 раза 4) не изменилось

A4. Давление газа при нагревании в закрытом сосуде увеличивается. Это можно объяснить увеличением

- 1) концентрации молекул 3) средней кинетической энергии молекул
2) расстояния между молекулами 4) средней потенциальной энергии молекул

Примеры решения задач по теме «Основное уравнение молекулярно-кинетической теории»

Обратим внимание на то, что в задачах, как правило, имеется в виду средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул. Связь этой скорости с макропараметрами, такими, как давление и температура, и устанавливает основное уравнение молекулярно-кинетической теории.

Именно поступательное движение молекул определяет их удары о стенку и силу, действующую на неё.

Задача 1. Плотность газа в баллоне электрической лампы $\rho = 0,9 \text{ кг/м}^3$. При горении лампы давление в ней возросло с $p_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ до $p_2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па}$. На сколько увеличилось при этом значение среднего квадрата скорости молекул газа?

Решение. Произведение массы m_0 одной молекулы на концентрацию молекул (число молекул в единице объёма) равно массе молекул, заключённых в единице объёма, т. е. плотности газа $\rho = m_0 n$. Следовательно, основное уравнение молекулярно-кинетической теории (9.6) можно записать в виде $p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$.

Поэтому $\overline{v_2^2} - \overline{v_1^2} = \frac{3}{\rho} (p_2 - p_1) = 10^5 \text{ (м/с)}^2$.

Задача 2. Определите плотность кислорода ρ_0 при давлении $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, если средний квадрат скорости его молекул равен 10^6 (м/с)^2 .

Решение. Давление кислорода $p = nm_0 \overline{v^2} / 3$, где n — концентрация молекул. Очевидно, что $\rho = m_0 n$, где m_0 — масса молекулы кислорода.

Окончательно имеем $p = \rho_0 \overline{v^2} / 3$, или $\rho_0 = \frac{3p}{\overline{v^2}} = 0,6 \text{ кг/м}^3$.

Задача 3. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средний квадрат скорости молекул $\overline{v_1^2} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}^2$, во втором сосуде — $\overline{v_2^2} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}^2$. Кран открывают. Чему будет равен средний квадрат скорости молекул после того, как установится равновесие?

Решение. Разные скорости молекул в сосудах объясняются разными температурами азота в них. Так как по условию задачи число молекул, имеющих скорость v_1 , равно числу молекул, имеющих скорость v_2 ($N_1 = N_2$), то квадрат средней скорости

$$\overline{v^2} = \frac{N_1 \overline{v_1^2} + N_2 \overline{v_2^2}}{N_1 + N_2} = \frac{\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2}}{2} = 2,05 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}^2.$$

Задача 4. С какой скоростью растёт толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией $\overline{E} = 10^{-17}$ Дж, производят на стенку давление $p = 0,1$ Па? Атомная масса серебра $A = 1,108$ г/моль, его плотность $\rho = 10,5$ г/см³.

Решение. Если за время Δt толщина слоя серебра стала равной Δl , то скорость роста толщины покрытия есть $\Delta l / \Delta t$. Объём напылённого слоя $\Delta V = S \Delta l$, где S - площадь поверхности стенки. Этот объём можно выразить иначе:

$$\Delta V = \frac{m}{\rho} = \frac{m_0 N}{\rho},$$

где m — масса серебряного покрытия, напылённого за время Δt , m_0 — масса атома, N — число атомов. Определим суммарную массу атомов серебра, осевших на стенку.

Изменение импульса атома, осевшего на стенку со скоростью v , равно импульсу силы, действовавшей на стенку со стороны атома:

$$f \tau = m_0 \Delta v = m_0(0 - v) = -m_0 v.$$

На стенку действует импульс силы $f_{\text{ст}} \tau = +m_0 v$. Если на стенку за время Δt осядет N атомов, то импульс силы, действовавший на стенку в результате ударов о неё N атомов, будет $F \Delta t = N m_0 v$.

Давление на стенку $p = F/S$, или

$$p = N m_0 v / S \Delta t. \quad (1)$$

Средняя кинетическая энергия атома $\overline{E} = m_0 v^2 / 2$, отсюда скорость атома $v = \sqrt{2 \overline{E} / m_0}$.

Подставив выражение для скорости в формулу (1), получим

$$N = p S \Delta t / \sqrt{2 m_0 \overline{E}}, \quad \Delta l = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m_0 N}{\rho S} = \frac{m_0 p \Delta t S}{\rho S \sqrt{2 m_0 \overline{E}}} = \frac{m_0 p \Delta t}{\rho \sqrt{2 m_0 \overline{E}}},$$

тогда

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{p \sqrt{m_0}}{\rho \sqrt{2 \overline{E}}}. \quad (2)$$

Масса атома серебра $m_0 = A/N_A$, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{p}{\rho} \sqrt{\frac{A}{N_A \cdot 2E}} \approx 9 \cdot 10^{-10} \text{ м/с.}$$

ЗАДАНИЕ

1. Разобрать примеры решения задач и кратко записать в рабочую тетрадь.

2. Задачи для самостоятельного решения (выполнить не менее двух задач)

1. Температура воздуха в комнате изменилась от 7 до 27 °С. На сколько процентов уменьшилось число молекул в комнате?

2. Под каким давлением находится газ в сосуде, если средний квадрат скорости его молекул $\overline{v^2} = 10^6 \text{ (м/с)}^2$, концентрация молекул $n = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, масса каждой молекулы $m_0 = 5 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$?

3. В колбе объёмом 1,2 л содержится $3 \cdot 10^{22}$ атомов гелия. Чему равна средняя кинетическая энергия каждого атома? Давление газа в колбе 10^5 Па .

4. Вычислите средний квадрат скорости движения молекул газа, если его масса $m = 6 \text{ кг}$, объём $V = 4,9 \text{ м}^3$ и давление $p = 200 \text{ кПа}$.