ЗАДАНИЕ: законспектировать материал и фотографии конспекта выслать на электронную почту : roman-sergeevich1982@mail.ru

§ 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\cos x = a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формула для корней уравнения $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1}$$

2. Частные случаи:

а) $\cos x = 1,\ x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ (2)

б) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ (3)

в) $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ (4)

3. Формула для корней уравнения $\cos^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид:

$$x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos 3x + \frac{1}{2}\right) \cos 2x \left(\cos \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos \frac{3x}{2} + 1\right) \times$$
$$\times \left(\cos^2 2x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Решение. Область определения — x — любое действительное число. Левая часть уравнения содержит шесть сомножителей. Правая часть уравнения равна нулю. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, надо решить шесть уравнений.

1) $\cos 2x-\frac{1}{2}=0$ (1), $\cos 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$2x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, то имеем:

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$, — корни уравнения (1) и исходного уравнения.

2) $\cos 3x+\frac{1}{2}=0$ (2), $\cos 3x=-\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, то

$$3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$ являются корнями уравнения (2) и исходного уравнения.

3) $\cos 2x=0$ (3). По формуле (3)

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$ являются корнями уравнения (3) и исходного уравнения.

4) $\cos\frac{x}{2}-1=0$ (4), $\cos\frac{x}{2}=1$. По формуле (2)

$$\frac{x}{2}=2\pi k,\ k\in Z;\ x=4\pi k,\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=4\pi k$, $k\in Z$, являются корнями уравнения (4) и исходного уравнения.

5) $\cos\frac{3x}{2}+1=0$ (5), $\cos\frac{3x}{2}=-1$. По формуле (4)

$$\frac{3x}{2}=\pi+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, являются корнями уравнения (5) и исходного уравнения.

6) $\cos^2 2x-\frac{1}{2}=0$ (6), $\cos^2 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (5)

$$2x=\pm\arccos\sqrt{\frac{1}{2}}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, то

$$2x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$ являются как корнями уравнения (6), так и исходного.