Законспектировать и выслать фотографии конспектов на электронную почту roman-sergeevich1982@mail.ru

44. Понятие о дифференциальных уравнениях

1. Непосредственное интегрирование. В ходе решения задач естествознания часто возникают соотношения, связывающие производные некоторой функции (первую, вторую и т. д.), саму эту функцию и независимую переменную. Например, согласно второму закону Ньютона при движении по прямой материальной точки постоянной массы m справедлива формула $F = ma$, где F — сила, вызывающая движение, a — ускорение точки. Пусть сила F зависит только от времени t, т. е. $F = F(t)$. Вспоминая, что ускорение есть вторая производная координаты по времени ($a(t) = x''(t)$), получаем дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$:

$$F(t) = mx''(t), \text{ т. е. } x''(t) = \frac{F(t)}{m},$$

для решения которого сначала находим $x'(t)$ как первообразную функции $\frac{F(t)}{m}$, а затем и $x(t)$ как первообразную функции $v(t) = x'(t)$. Общее решение зависит от двух произвольных постоянных. Для того чтобы их найти, обычно задают координату и скорость в какой-либо момент времени t.

Пример 1. При вертикальном движении под действием силы тяжести координата $h(t)$ точки единичной массы удовлетворяет дифференциальному уравнению (ось Oz направлена вертикально вниз):

$$h''(t) = g.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \text{ где } h_0 = h(0),\ v_0 = v(0).$$

Задав h_0 и v_0, мы получим уже единственное решение.

Вообще первообразную F для функции f можно рассматривать как решение *простейшего дифференциального уравнения*

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — данная функция, $F(x)$ — решение этого уравнения.