Законспектировать и фотографии конспектов прислать на электронную почту Roman-sergeevich1982@mail.ru

§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке 151. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей положительные значения, а с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой *криволинейной трапеции*.

Выясним, как можно вычислить площадь S криволинейной трапеции с помощью первообразной функции $f(x)$.

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 152), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x = a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку и поэтому $S(a) = 0$, при $x = b$ имеем $S(b) = S$.

Покажем, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

● Рассмотрим разность $S(x + h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x + h]$ (рис. 153). Если число h мало, то эта площадь приблизительно равна $f(x) \cdot h$, т. е. $S(x + h) - S(x) \approx f(x) \cdot h$.

Следовательно, $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$. При $h \to 0$ левая часть этого приближенного равенства по

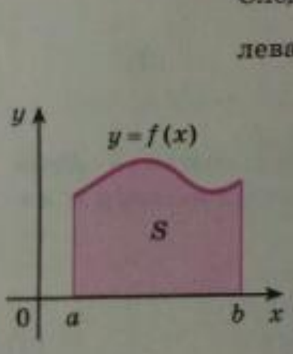

Рис. 151

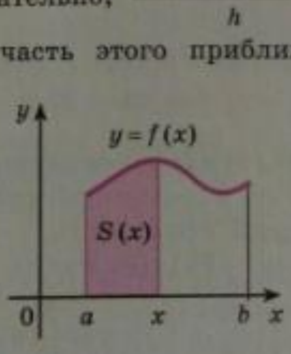

Рис. 152

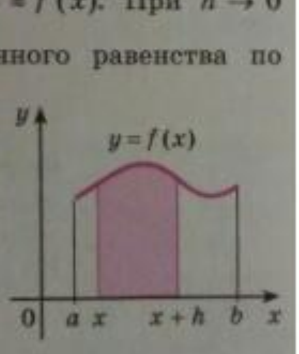

Рис. 153

определению производной стремится к $S'(x)$, а погрешность приближения при $h \to 0$ становится как угодно малой. Поэтому при $h \to 0$ получается равенство $S'(x) = f(x)$. Это означает, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$. ○

Любая другая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ отличается от $S(x)$ на постоянную, т. е.

$$F(x) = S(x) + C. \tag{1}$$

Из этого равенства при $x = a$ получаем $F(a) = S(a) + C$. Так как $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ и равенство (1) можно записать так:

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Отсюда при $x = b$ получаем

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

Итак, площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{S = F(b) - F(a)}, \tag{2}$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.