

## § 4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция  $y=f(x)$  называется четной, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки  $O$  (т. е. если точка  $a$  принадлежит области определения, то точка  $-a$  также принадлежит области определения);

2) для любого значения  $x$ , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство  $f(x)=f(-x)$ .

2. Функция  $y=f(x)$  называется нечетной, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки  $O$ ;

2) для любого значения  $x$ , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство  $f(-x)=-f(x)$ .

3. График четной функции  $y=x^2$  изображен на рисунке 10.

4. График нечетной функции  $y=x^3$  изображен на рисунке 11.

5. Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной. Например, каждая из функций  $y=12x+1$ ,  $y=x^4+x$ ,  $y=(x+3)^2$  не является ни четной, ни нечетной.

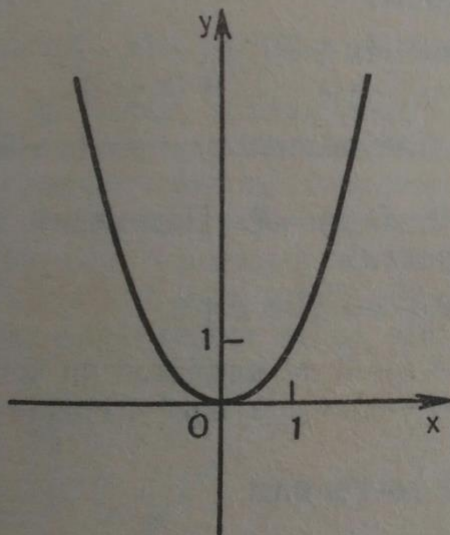


Рис. 10

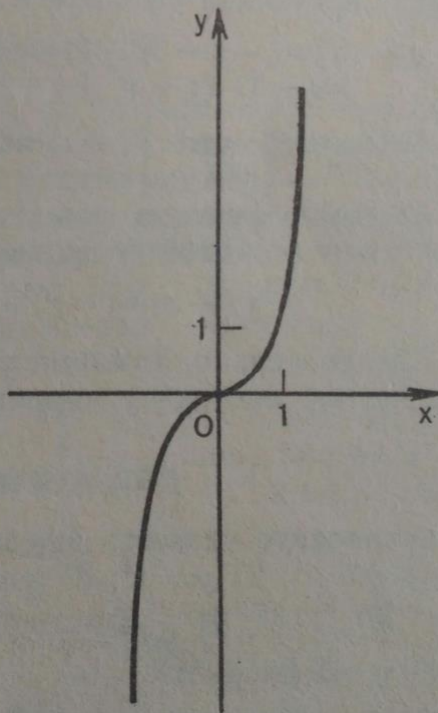


Рис. 11

## УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать, что функция  $y=3x+1$  не является ни четной, ни нечетной.

**Доказательство.** Областью определения данной функции  $y=3x+1$  является вся координатная прямая, т. е. условие 1 в определении четной и нечетной функций выполнено. Чтобы доказать, что функция  $y=3x+1$  не является четной, мы должны доказать, что условие 2 в определении четной функции не выполнено, т. е. что существует (хотя бы одно) значение  $x$ , для которого  $f(x) \neq f(-x)$ . Возьмем  $x=1$ . Тогда  $f(1)=4$ , а  $f(-1)=-2$ , т. е.  $f(1) \neq f(-1)$ . Таким образом, функция  $f(x)$  не является четной. Аналогично так как  $f(-1) \neq -f(1)$ , то функция  $y=3x+1$  не является нечетной.

2. Выяснить четность или нечетность функции:

1)  $y=x+\frac{1}{x}$ ; 2)  $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ ; 3)  $y=x^2-x+3$ .

**Решение.** 1) Дана функция  $y=x+\frac{1}{x}$ , где  $x \neq 0$ . Найдем  $y(-x)$ :

$$y(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Получили, что  $f(-x) = -f(x)$ , следовательно,  $y=x+\frac{1}{x}$  — функция нечетная.

2) Дана функция  $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ ,  $D(y)=\mathbf{R}$ . Переменим знак у аргумента функции и упростим:

$$\begin{aligned} y(-x) &= (-x-3)^2 + (-x+3)^2 = (-(x+3))^2 + (-(x-3))^2 = \\ &= (-1)^2(x+3)^2 + (-1)^2(x-3)^2 = (x+3)^2 + (x-3)^2. \end{aligned}$$

Получили, что  $f(-x) = f(x)$ . Следовательно,  $y=(x-3)^2+(x+3)^2$  — функция четная.

3) Дана функция  $y=x^2-x+3$ ,  $D(y)=\mathbf{R}$ . Переменим знак у аргумента данной функции и упростим:

$$y(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3.$$

Следовательно, функция  $y=x^2-x+3$  не является ни четной, ни нечетной, поскольку, например,  $y(-1) \neq y(1)$  и  $y(-1) \neq -y(1)$ .